

Diseño de Controladores Robustos con Aplicación al Problema del Acotamiento Frecuencial

C. Robles-Palomares, C. Elizondo-González, E. Alcorta-García
Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica, FIME, UANL.
Av. Pedro de Alba S/N, Cd. Universitaria,
San Nicolás de los Garza, N.L., C.P. 66451, México
cesar.palomares@gmail.com; celizond@yahoo.com; ealcorta@ieee.org

Resumen—En el presente artículo se presenta un procedimiento para obtener una aproximación de la caja de valores de ajuste de los parámetros del controlador, cumpliendo con un criterio de desempeño propuesto, establecido en términos del acotamiento frecuencial en el plano-s. La aplicación de los resultados se ilustran a manera de ejemplo para un modelo de una máquina síncrona, con el objetivo de asegurar el acotamiento frecuencial de la llamada “oscilación de baja frecuencia” presente en el desplazamiento angular del rotor. **Palabras clave:** Sistemas lineales inciertos, Control robusto, Desempeño robusto.

I. INTRODUCCIÓN

En años recientes, la teoría de control robusto paramétrico ha avanzado notablemente en términos de su capacidad para analizar la estabilidad robusta de los sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. Lo anterior ha sido logrado transformando el problema original en un problema de análisis de positividad robusta mediante criterios de estabilidad, tales como el criterio de estabilidad (C. Elizondo) publicado en (Elizondo-González C., 2001), (Elizondo-González C., 2011), el criterio de estabilidad de 4-polinomios publicado en (Keel L. H., Bhattacharyya S. P., 2008) y el criterio de estabilidad de 8-polinomios publicado en (Knap et al., 2010).

El análisis de la positividad robusta fue resuelto en (Elizondo-González C., 1999), (Elizondo-González C., 2011) mediante la herramienta matemática “descomposición de signo” que es capaz de analizar, en condiciones necesarias y suficientes, la positividad robusta de polinomios característicos que poseen en sus coeficientes, funciones multivariantes de tipo polinómica (conocida también como no lineal).

Estos avances recientes han motivado el interés hacia otros temas de investigación, como es el caso del diseño de controladores robustos de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica, cuyo objetivo es resolver por medio de un procedimiento o algoritmo, el problema del cálculo de cotas de los parámetros del controlador, con las cuales se pueda obtener una aproximación de la región en el espacio de parámetros de la caja paramétrica del controlador K , que garantice la estabilidad robusta paramétrica del sistema. Resultados recientes sobre este tema se encuentran publicados en (Keel L. H., Bhattacharyya S. P., 2008), (Keel L. H.,

Bhattacharyya S. P., 2009) y (Keel L. H., Bhattacharyya S. P., 2011). De igual forma, es posible diseñar un controlador robusto que además de asegurar la estabilidad robusta del sistema, garantice el cumplimiento de uno o varios criterios de desempeño. Por ejemplo, en (Knap et al., 2010) se establecen estos criterios de desempeño en términos de márgenes de ganancia, de fase y de H_∞ .

En este artículo se presenta un procedimiento que es útil para resolver el problema del diseño de controladores robustos de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. Dicho procedimiento es aplicable para el cumplimiento de un criterio de desempeño establecido en términos del acotamiento frecuencial, esto es, del acotamiento de la parte imaginaria ω_{d_i} de todas las raíces del polinomio característico en el plano-s, tal que $\omega_{d_i} < \omega_c$, donde ω_c es un valor de cota predeterminado.

A continuación se describe la organización del presente artículo: en la sección II se presenta una breve descripción de la herramienta matemática descomposición de signo que contiene: algunas definiciones, el teorema del rectángulo, el teorema del polígono y el teorema de partición de cajas, útiles en el análisis de la positividad robusta. En la sección III se describen los preliminares: un teorema útil para el acotamiento frecuencial y un criterio de estabilidad útil para el análisis de la estabilidad robusta (cabe mencionar que ambos resultados son aplicables tanto a polinomios con coeficientes fijos como a polinomios con coeficientes con incertidumbre paramétrica). En la sección IV se propone un procedimiento para la síntesis de controladores robustos para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica aplicable al problema del acotamiento frecuencial. En la sección V se presenta un ejemplo que ilustra la aplicación del resultado de la sección anterior en el modelo simplificado de una máquina síncrona. En la sección VI se presentan las conclusiones del artículo.

II. BREVE DESCRIPCIÓN DE DESCOMPOSICIÓN DE SIGNO

A continuación se incluye una breve descripción de los resultados más importantes de la herramienta matemática “descomposición de signo”. Véase la versión completa de la

herramienta en (Elizondo-González C., 1999) y (Elizondo-González C., 2011).

El problema de probar la estabilidad robusta de un sistema LTI con incertidumbre paramétrica se reduce a resolver la positividad robusta (Elizondo-González C., 2000) de funciones multivariantes polinómicas dependientes en un vector de parámetros $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T$, del cual se conocen únicamente las cotas inferior y superior $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$ de cada parámetro. El conjunto de todos los vectores q forman una caja de incertidumbre paramétrica $Q = \{q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T | q_i \in [q_i^-, q_i^+] \forall i\}$.

El problema de positividad robusta de funciones multivariantes polinómicas dependientes de un vector con incertidumbre paramétrica q , fue resuelto en (Elizondo-González C., 1999) desarrollando la herramienta matemática “Descomposición de signo” que mediante el análisis de puntos extremos es capaz de determinar en condiciones necesarias y suficientes la positividad robusta de una función multivariante polinómica. Para poder introducir los conceptos de descomposición de signo son necesarias las siguientes definiciones previamente establecidas en matemáticas comunes.

Definición 1: Sea P un cono convexo positivo en un espacio vectorial \mathbb{R}^ℓ , para $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ se dice que $x \geq y$ ($x > y$) con respecto a P si $x - y \in P$ ($x - y \in P^\circ$, el interior de P).

Definición 2: Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ es una función no-decreciente en Q si $x \geq y$ implica $f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in Q$.

Definición 3: (Elizondo-González C., 1999), (Elizondo-González C., 2000), (Elizondo-González C., 2011) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ un subconjunto convexo, se dice que $f(\cdot)$ tiene descomposición de signo en Q si existen dos funciones acotadas no-decrecientes $f_n(\cdot) \geq 0$, $f_p(\cdot) \geq 0$, tales que $f(q) = f_p(q) - f_n(q)$ para toda $q \in Q$. Dichas funciones se llamarán: la parte positiva de la función $f_p(\cdot)$ y la parte negativa de la función $f_n(\cdot)$.

$$\begin{aligned} f(q) &= f_p(q) - f_n(q) \quad \forall q \in Q \\ f_p(\cdot) &\triangleq \text{Parte Positiva de } f(\cdot) \\ f_n(\cdot) &\triangleq \text{Parte Negativa de } f(\cdot) \end{aligned}$$

Las partes negativa y positiva ($f_n(\cdot)$, $f_p(\cdot)$), constituyen una representación (f_n, f_p) de la función en \mathbb{R}^2 con una representación gráfica en el plano ($f_n(\cdot), f_p(\cdot)$) de acuerdo con la figura 1. Debe de notarse que si se toma un vector $q \in \mathbb{R}^\ell$ y se calculan $f_n(q)$ y $f_p(q)$, estas últimas forman las coordenadas de $f(q)$ en \mathbb{R}^2 quedando representada $f(q)$ por un punto en el plano (f_n, f_p) (véase la figura 1).

Definición 4: (Elizondo-González C., 1999), (Elizondo-González C., 2000), (Elizondo-González C., 2011) Se le llamará vértice mínimo y máximo Euclidiano v^{\min} , v^{\max} a los vectores elementos de $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ con mínima y máxima norma Euclidiana respectivamente.

$$\|v^{\min}\|_2 = \min_{q \in Q} \|q\|_2, \quad \|v^{\max}\|_2 = \max_{q \in Q} \|q\|_2$$

Dado que las partes negativa $f_n(q)$ y positiva $f_p(q)$ son funciones no decrecientes en un espacio vectorial, entonces ambas son funciones acotadas dando lugar al siguiente teorema:

Teorema 1: (Teorema del Rectángulo) (Elizondo-González C., 1999), (Elizondo-González C., 2000), (Elizondo-González C., 2011)

Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos v^{\min} , v^{\max} , entonces:

- $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$ y $f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min})$ respectivamente,
- la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in Q$ en el plano (f_n, f_p) está contenida en el rectángulo con vértices ($f_n(v^{\min}), f_p(v^{\min})$), ($f_n(v^{\max}), f_p(v^{\max})$), ($f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max})$) y ($f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min})$),
- si el vértice inferior derecho ($f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min})$) está arriba de la recta de 45° entonces la función $f(q) > 0 \forall q \in Q$,
- si el vértice superior izquierdo ($f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max})$) está abajo de la recta de 45° entonces la función $f(q) < 0 \forall q \in Q$.

Las cotas de la función determinadas por el teorema del rectángulo son mejoradas al tomar en cuenta las partes independiente, lineal y no lineal de la función como se muestra en el siguiente teorema que requiere de la siguiente proposición.

Proposición 1: (Elizondo-González C., 1999), (Elizondo-González C., 2000), (Elizondo-González C., 2011) Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$, sea Γ una caja contenida en Q con un conjunto de vértices $\{\mu^i\}$ con vértices mínimo y máximo euclidianos μ^{\min} , μ^{\max} , sea $\Delta = \{\delta | \delta_i \in [0, \delta_i^{\max}], \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}\} \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ con un conjunto de vértices $\{\delta^i\}$ con vértices mínimo y máximo euclidianos $\mathbf{0}$ y $\delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$, y sea $q \in \Gamma$ tal que $q = \mu^{\min} + \delta$ donde $\delta \in \Delta$, entonces la función $f(q)$ se puede expresar mediante sus partes lineal, no lineal e independiente en su mínima expresión, para toda $q \in \Gamma$.

$$f(q) = f^{\min} + f_L(\delta) + f_N(\delta) \quad | \quad \delta \in \Delta \quad \forall q \in \Gamma$$

$$f^{\min} \equiv \text{Parte Independiente} = f(\mu^{\min})$$

$$f_L(\delta) \equiv \text{Parte Lineal} = \nabla f(q)|_{\mu^{\min}} \cdot \delta \quad \forall \delta \in \Delta$$

$$f_N(\delta) \equiv \text{Parte No-lineal}$$

$$f_N(\delta) = f(\mu^{\min} + \delta) - f^{\min} - f_L(\delta) \quad \forall \delta \in \Delta$$

Teorema 2: (Teorema del Polígono) (Elizondo-González C., 1999) (Elizondo-González C., 2000), (Elizondo-González C., 2011)

Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función con descomposición de signo en Q , sean: q , δ , Γ y Δ de acuerdo a la proposición anterior. Entonces: a) la función $f(q)$ está acotada inferior y superiormente por: $Cota \text{ ínf} = f^{\text{mín}} + f_{L\text{mín}} - f_{Nn}(\delta^{\text{máx}})$ y $Cota \text{ sup} = f^{\text{mín}} + f_{L\text{máx}} + f_{Np}(\delta^{\text{máx}}) \forall q \in Q$, b) las cotas del inciso "a" están contenidas en el intervalo que definen las cotas del teorema 3 $f_p(\mu^{\text{mín}}) - f_n(\mu^{\text{máx}}) \leq Cota \text{ ínf} \leq Cota \text{ sup} \leq f_p(\mu^{\text{máx}}) - f_n(\mu^{\text{mín}})$, c) la representación gráfica de la función $f(q)$, $\forall q \in \Gamma$ en el plano (f_n, f_p) , está dentro del polígono que se define intersectando el rectángulo del teorema 3 con el espacio entre las rectas a 45° separadas del origen la cota mínima $f^{\text{mín}} + f_{L\text{mín}} - f_{Nn}(\delta^{\text{máx}})$, y la cota máxima $f^{\text{mín}} + f_{L\text{máx}} + f_{Np}(\delta^{\text{máx}})$.

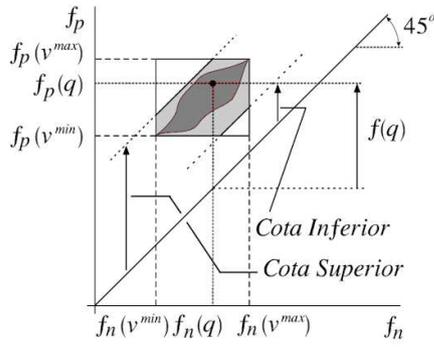


Figura 1: Rectángulo y polígono que acotan la función f_q

La positividad robusta de una función polinómica multivariable, en condiciones necesarias y suficientes, se obtiene utilizando el siguiente teorema.

Teorema 3: (Teorema de Determinación de Signo mediante Partición de Cajas). (Elizondo-González C., 1999) (Elizondo-González C., 2000), (Elizondo-González C., 2011)

Sea $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con descomposición de signo en Q tal que $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$ es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos $v^{\text{mín}}$, $v^{\text{máx}}$. Entonces la función $f(q)$ es positiva (negativa) en Q si y sólo si existe un conjunto de cajas Γ tal que $Q = \bigcup_i \Gamma^i$ y $Cota \text{ ínf} \geq c > 0$ para cada caja Γ^i ($Cota \text{ sup} \leq c < 0$ para cada caja Γ^i).

III. PRELIMINARES

III-A. Teorema de acotamiento frecuencial de raíces de polinomios

En (Robles-Palomares C. et al., 2010) se realiza un análisis de cotas de la parte imaginaria de las raíces de polinomios característicos con coeficientes reales correspondientes a sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. En tal publicación, se presenta un teorema aplicable tanto a polinomios con coeficientes fijos como a polinomios que poseen coeficientes con incertidumbre paramétrica. Dicho

teorema es de utilidad para los fines del presente trabajo, ya que dado un valor de cota preestablecido permite determinar si la parte imaginaria de todas las raíces de un polinomio están contenidas por debajo de este valor. Este teorema se enuncia a continuación.

Teorema 4: (Robles-Palomares C. et al., 2010)

Sea $p(s)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales, $p(s) = C_0 + C_1s + \dots + C_ns^n$. Sea $p^*(s)$ un polinomio de grado $2n$, $p^*(s) = \bar{p}(s)\hat{p}(s)$ donde $\bar{p}(s) = p(js)$ y $\hat{p}(s) = p(-js)$. Entonces, $p^*(s)$ tiene coeficientes reales y $p(s)$ tiene la parte imaginaria ω_{d_i} de sus raíces, tal que $\omega_{d_i} \leq \omega_c$ ($\omega_{d_i} < \omega_c$), si y sólo si, el polinomio $p^*(s + \omega_c)$ es estable (asintóticamente estable).

El teorema anterior permite el análisis de cotas de la parte imaginaria de las raíces de polinomios característicos, trasladando el problema original a un problema tradicional de estabilidad, pudiéndose aplicar así cualquier criterio de estabilidad deseado. Para el caso de incertidumbre paramétrica, se utiliza la herramienta matemática descomposición de signo para probar la positividad robusta de funciones multivariables polinómicas, así como el reciente criterio de estabilidad (Elizondo-González C., 2001), (Elizondo-González C., 2011) que se describe a continuación.

III-B. Criterio de estabilidad (C. Elizondo)

Este reciente criterio de estabilidad se fundamenta en el principio del argumento, en índices de Cauchy y en cadenas modificadas de Sturm (Elizondo-González C., 2001), (Elizondo-González C., 2011). Mediante estas bases matemáticas es obtenido el siguiente teorema.

Teorema 5: (Elizondo-González C., 2001), (Elizondo-González C., 2011)

Dado un polinomio $p(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots + C_{n-1}s^{n-1} + C_ns^n$ con coeficientes reales, el número de raíces a la derecha del plano de los complejos es igual al número de variaciones de signo en la columna σ en el siguiente arreglo.

σ_1	C_n	C_{n-2}	C_{n-4}	\dots
σ_2	C_{n-1}	C_{n-3}	C_{n-5}	\dots
σ_3	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	\dots	
σ_4	$e_{4,1}$	$e_{(4,2)}$	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots		
$\sigma_{(n-1)}$	$e_{(n-1),1}$	$e_{(n-1),2}$		
σ_n	$e_{(n,1)}$			
σ_{n+1}	$e_{(n+1),1}$			

$$e_{i,j} = (e_{i-1,1}e_{i-2,j+1} - e_{i-2,1}e_{i-1,j+1}), \forall 3 \leq i \leq n+1$$

$$e_{i,j} = C_{n+1-i-2(j-1)} \forall i \leq 2$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \forall i \leq 2$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \prod_{j=1}^{(i+1-m)/2} \text{Sign}(e_{(m+2(j-1)),(1)}) \forall i \geq 3$$

$$m = 3 \text{ para } i \text{ par, } m = 2 \text{ para } i \text{ non.}$$

El cálculo de la primera columna σ_i pudiera parecer complejo en la fórmula matemática, sin embargo, el cálculo de signo σ_i de cada renglón se determina

simplemente multiplicando el signo del elemento de la segunda columna (por ejemplo, $e_{(i),1}$) por el signo del elemento superior (por ejemplo, $e_{(i-1),1}$) y por los signos de los demás elementos superiores de la segunda columna, “brincando” de dos en dos. Por ejemplo: $\sigma_7 = \text{sign}(e_{(7,1)})\text{sign}(e_{(6,1)})\text{sign}(e_{(4,1)})\text{sign}(e_{(2,1)})$.

IV. RESULTADOS PRINCIPALES

Sea $P(s, q)$ la función de transferencia del proceso $P(s, q) = \frac{N_p(s, q)}{D_p(s, q)}$ donde la incertidumbre paramétrica del proceso genera una familia \mathbf{P} de funciones, tal que $\mathbf{P} = P(s, Q) : Q \subset \mathbb{R}^\ell$. Sea $C(s, k)$ la función de transferencia del controlador $C(s, k) = \frac{N_c(s, k)}{D_c(s, k)}$ donde la incertidumbre paramétrica del controlador genera una familia de funciones \mathbf{C} , tal que $\mathbf{C} = C(s, K) : K \subset \mathbb{R}^\rho$. Sea $p(s, q, k)$ el polinomio característico del sistema en lazo cerrado, en $Q \times K \subset \mathbb{R}^{\ell+\rho}$, donde Q es la caja de incertidumbre paramétrica del proceso, $Q = \{q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T | q_i \in [q_i^-, q_i^+] \forall i\}$ siendo $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T$ el vector de parámetros del cual se conocen únicamente las cotas inferior y superior $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$ de cada parámetro y K es la caja paramétrica del controlador, $K = \{k = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_\rho]^T | k_j \in [k_j^-, k_j^+] \forall j\}$ siendo $k = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_\rho]^T$ el vector de parámetros del controlador cuyos valores k_j están dentro del segmento de ajuste del controlador $k_j \in [k_j^-, k_j^+]$. El objetivo es encontrar los valores de los parámetros del controlador que cumplan con el siguiente criterio de desempeño.

IV-A. Problema del acotamiento frecuencial como criterio de desempeño

Se desea como criterio de desempeño, el acotamiento de la parte imaginaria ω_{d_i} de todas las raíces del polinomio característico $p(s, q, k)$ en el plano- s , tal que $\omega_{d_i} < \omega_c$, donde ω_c es un valor de cota predeterminado. Para cumplir este objetivo, se utiliza el teorema 4 para obtener el polinomio $p^*(s + \omega_c, q, k)$. Entonces, el conjunto de valores de los parámetros del controlador que garantizan el acotamiento frecuencial deben de cumplir con la siguiente condición:

$$\{C(s, K) : p^*(s + \omega_c, q, k) \in \mathbf{H}, \forall q \in Q, \forall k \in K\} \quad (1)$$

En donde \mathbf{H} es el conjunto de todos los polinomios que cumplen la estabilidad asintótica robusta paramétrica. Por lo tanto, el conjunto de todos los vectores de parámetros k que cumplan con la condición de la ecuación 1 determinará una caja paramétrica del controlador $K \subset \mathbb{R}^\rho$.

A continuación, se propone el siguiente procedimiento para obtener una aproximación de la caja de valores de ajuste de los parámetros del controlador K con dos parámetros ($K \subset \mathbb{R}^2$).

IV-B. Procedimiento para obtener una aproximación de la caja $K \subset \mathbb{R}^2$

El procedimiento que se propone en esta sección, comparte un punto en común con el procedimiento propuesto en (Keel L. H., Bhattacharyya S. P., 2011). Este punto

en común es que ambos utilizan la “división de retícula” del espacio de parámetros. Cabe mencionar que el procedimiento que se propone enseguida, no utiliza la técnica de “bisectar/duplicar” utilizada en (Keel L. H., Bhattacharyya S. P., 2011).

El procedimiento se describe a continuación:

I) Proponer valores iniciales mínimo y máximo para cada parámetro del controlador $k_1^0 \in [k_{1min}^0, k_{1max}^0]$ y $k_2^0 \in [k_{2min}^0, k_{2max}^0]$. Dichos valores se establecen convenientemente, de tal forma que se encierre por completo la región a determinar, tal como se muestra en la figura 2. Con estos valores iniciales, se forma el vector de parámetros inicial k^0 , tal que $k^0 = [k_1^0, k_2^0]^T$.

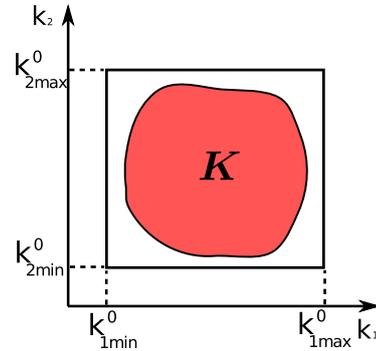


Figura 2: Valores iniciales de los parámetros del controlador

II) Utilizando el criterio de estabilidad (C. Elizondo) y la herramienta matemática “descomposición de signo”, se evalúa la estabilidad robusta paramétrica del polinomio característico $p^*(s + \omega_c, q, k^0)$, $\forall q \in Q, \forall k^0 \in K$.

III) Si se cumple la estabilidad robusta en el paso II, únicamente el vector de parámetros inicial k^0 estará contenido dentro de una caja de incertidumbre paramétrica del controlador K y finalizará el procedimiento (lo cual sucede cuando los valores del vector inicial k^0 se encuentran dentro de la región a determinar). En este caso, si se desea obtener una aproximación más exacta de la región se debe regresar al paso I y proponer valores de los parámetros del controlador más pequeños para el caso de los valores iniciales mínimos y más grandes para el caso de los valores iniciales máximos. Si no se cumple la estabilidad robusta en el paso II, se continúa el procedimiento con el siguiente paso.

IV) Se dividirá por la mitad el segmento de cada parámetro k^i y con dichos valores se construirán 4 cajas de parámetros k^i para $i = 1, \dots, 4$, tal como se ilustra en la figura 3b.

V) Se analiza nuevamente la estabilidad robusta paramétrica del polinomio para cada una de las 4 cajas de parámetros correspondientes k^i para $i = 1, \dots, 4$. Las cajas que cumplan la estabilidad robusta paramétrica, estarán contenidas en la aproximación de una caja paramétrica del

controlador K . Aquellos que no la cumplan se dividirán nuevamente, repitiéndose el procedimiento a partir del paso IV, tal como se ilustra en las figuras 3c y 3d. Esta división se realizará hasta que la diferencia entre los valores mínimo y máximo de los parámetros sea menor que un valor ε predeterminado.

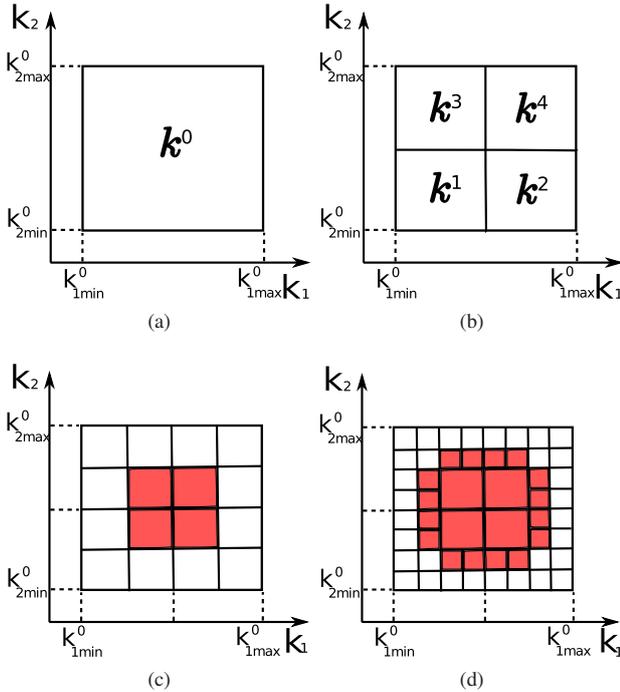


Figura 3: Descripción gráfica del procedimiento

V. EJEMPLO

V-A. Aplicación del acotamiento frecuencial en el modelo de una máquina síncrona

A continuación, se trabaja a manera de ejemplo con un modelo simplificado de la máquina síncrona. La figura 4 muestra el diagrama de bloques de una máquina síncrona abasteciendo un bus infinito a través de una impedancia externa. Las relaciones en este diagrama de bloques son aplicables para una representación de la máquina de dos ejes, con un circuito de campo en el eje directo, pero sin efectos de amortiguador, en donde: ΔT_e y ΔT_m son las desviaciones de los torques electromagnético y mecánico, respectivamente. $\Delta\delta$ es la desviación del ángulo del rotor, $\Delta\omega_r$ es la desviación de velocidad del rotor, H es la constante de inercia y ω_0 es la velocidad síncrona de la red (377rad/s para un sistema a 60Hz). Los parámetros de la máquina K_1 a K_6 están en función de las impedancias de la misma y del sistema, y éstos varían según las condiciones de operación, tales como, las condiciones de carga y los factores de potencia. Para mayores detalles, véase el capítulo 12 de (Kundur P., 1994).

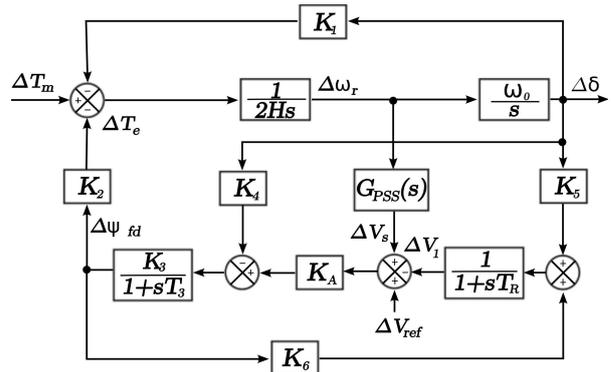


Figura 4: Modelo simplificado de una máquina síncrona conectada a un bus infinito

Los problemas de “estabilidad de pequeña señal” son causados por la falta de suficiente torque de “sincronización” y de “amortiguamiento”, después de una pequeña perturbación o disturbio. Específicamente, la falta de torque de amortiguamiento resulta en problemas de estabilidad causados por la existencia de la “oscilación de baja frecuencia” (o “LFO”, por sus siglas en inglés).

Para solucionar estos problemas de estabilidad y añadir amortiguamiento a la oscilación del rotor de la máquina se utilizan, un estabilizador de potencia y un regulador automático de voltaje (conocidos como “PSS” y “AVR” respectivamente, por sus siglas en inglés). Las funciones de transferencia de ambos controladores son: $G_{PSS}(s) = K_{STAB} \frac{sT_W}{1+sT_W} \frac{1+sT_1}{1+sT_2}$ y $G_{AVR}(s) = K_A \frac{1}{1+sT_R}$.

Los valores de los parámetros del sistema se definen basándose en los ejemplos 12.3 y 12.4 de (Kundur P., 1994). Estos valores son: $H = 3.5$, $T_1 = 0.154$, $T_2 = 0.033$, $T_3 = 2.365$, $T_R = 0.02$, $T_W = 1.4$, $K_1 = 0.7643$, $K_2 = 0.8649$, $K_3 = 0.3230$, $K_4 = 1.4187$, $K_5 = -0.1463$, $K_6 = 0.4168$. Debido a la variación de las condiciones de operación de la máquina, se considera un $\pm 10\%$ de incertidumbre en los parámetros K_1 a K_6 , sin tomar en cuenta al parámetro K_3 . Utilizando la nomenclatura común en el control robusto paramétrico, se definen los parámetros inciertos del proceso como: $\hat{q}_1 = K_1$, $\hat{q}_2 = K_2$, $\hat{q}_3 = K_4$, $\hat{q}_4 = K_5$ y $\hat{q}_5 = K_6$. Entonces, los valores mínimo y máximo de cada parámetro incierto son: $0.68787 \leq \hat{q}_1 \leq 0.84073$, $0.77841 \leq \hat{q}_2 \leq 0.95139$, $1.2768 \leq \hat{q}_3 \leq 1.5606$, $-0.16093 \leq \hat{q}_4 \leq -0.13167$, $0.37512 \leq \hat{q}_5 \leq 0.45848$. Resulta conveniente entonces realizar una transformación de coordenadas para dichos parámetros de la siguiente manera: $\hat{q}_1 = 0.68787 + (0.84073 - 0.68787)q_1$, $\hat{q}_2 = 0.77841 + (0.95139 - 0.77841)q_2$, $\hat{q}_3 = 1.2768 + (1.5606 - 1.2768)q_3$, $\hat{q}_4 = -0.16093 + (-0.13167 - (-0.16093))q_4$, $\hat{q}_5 = 0.37512 + (0.45848 - 0.37512)q_5$, de tal forma que $q_i = [0, 1] \forall q_i \in P \subset Q$. Asimismo, se definen los parámetros de ajuste del controlador como: $k_1 = K_A$ y $k_2 = K_{STAB}$. Entonces, es deseable obtener los valores de los parámetros k_1 y k_2 que aseguren el

acotamiento de la frecuencia ω_d de la LFO de $\Delta\delta$ por debajo de un cierto valor; en este ejemplo, se tomará este valor de cota como $\omega_c = 1,5Hz$ ($\omega_c = 3\pi rad/s$).

La función de transferencia del sistema se omite por razones de espacio, véase (Kundur P., 1994) para mayores detalles. A continuación se incluye el polinomio característico correspondiente al modelo descrito.

$$\begin{aligned}
 p(s, q, k) &= C_6(q, k)s^6 + C_5(q, k)s^5 + C_4(q, k)s^4 \\
 &+ C_3(q, k)s^3 + C_2(q, k)s^2 + C_1(q, k)s^1 + C_0(q, k)s^0 \\
 C_6 &= 1.529 \times 10^{-2} \\
 C_5 &= 1.245 \\
 C_4 &= 3.918 \times 10^{-2}k_1 + 0,125q_1 + 1.084 \times 10^{-3}k_1k_2 \\
 &+ 8.707 \times 10^{-3}k_1q_5 + 2.409 \times 10^{-4}k_1k_2q_2 + 25.145 \\
 C_3 &= 1.215k_1 + 10.256q_1 - 2.485 \times 10^{-2}q_2 - 2.485 \\
 &\times 10^{-2}q_3 + 6.124 \times 10^{-2}k_1k_2 + 0,270k_1q_5 - 5.523 \\
 &\times 10^{-3}q_2q_3 + 1.361 \times 10^{-2}k_1k_2q_2 + 72.766 \\
 C_2 &= 3.004k_1 + 202.34q_1 - 2.013q_2 - 2.013q_3 + 0.352 \\
 &k_1k_2 + 0,322k_1q_1 + 0,156k_1q_2 - 0,128k_1q_4 + 0,511k_1q_5 \\
 &- 0,447q_2q_3 + 7.822 \times 10^{-2}k_1k_2q_2 + 7.168 \\
 &\times 10^{-2}k_1q_1q_5 - 2.847 \times 10^{-2}k_1q_2q_4 + 908.47 \\
 C_1 &= 66.886k_1 + 220.03q_1 - 39.077q_2 - 39.086q_3 \\
 &+ 10.006k_1q_1 + 4.857k_1q_2 - 3.974k_1q_4 + 10.006k_1q_5 \\
 &- 8.685q_2q_3 + 2.223k_1q_1q_5 - 0,883k_1q_2q_4 + 814.27 \\
 C_0 &= 46.675k_1 + 57.628q_1 - 26.894q_2 - 26.901q_3 \\
 &+ 6.982k_1q_1 + 3.3898k_1q_2 - 2.773k_1q_4 + 6.9824k_1q_5 \\
 &- 5.977q_2q_3 + 1.551k_1q_1q_5 - 0,61633k_1q_2q_4 + 138.3
 \end{aligned} \tag{2}$$

Aplicando el teorema de acotamiento frecuencial de raíces de polinomios (descrito en la sección de preliminares) en la ecuación (2), se obtiene el polinomio $p^*(s + \omega_c, q, k)$, cuyos coeficientes se omitirán también por razones de espacio. Substituyendo $\omega_c = 3\pi rad/s$ en dicho polinomio y proponiendo los siguientes valores iniciales $k_1^0 = [0 \ 100]$ y $k_2^0 = [0 \ 100]$, se aplicó el procedimiento propuesto en la sección anterior con ayuda del software matemático "MATLAB" y se obtuvo una región correspondiente en el espacio de parámetros del controlador (k_1, k_2) que cumple con la especificación de desempeño establecida, en este caso, con el acotamiento de la frecuencia ω_d de todas las raíces del polinomio de la ecuación (2), tal que $\omega_d < 3\pi rad/s$, véase la gráfica correspondiente en la figura 5. Cabe mencionar que el procedimiento se detuvo hasta que la diferencia entre los valores mínimo y máximo de k_1 y k_2 fue menor que 0.1.

VI. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó un procedimiento útil para obtener una aproximación de la caja de incertidumbre paramétrica del controlador K , cumpliendo con un criterio

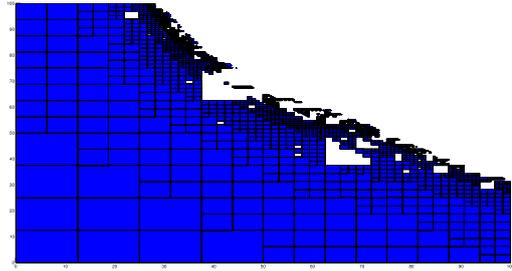


Figura 5: Valores de (k_1, k_2) donde $\omega_d < 3\pi rad/s$ (escala de 0 a 100 en ambos ejes)

de desempeño, el cual está establecido en términos del acotamiento frecuencial en el plano- s . Además, se presentó un ejemplo que ilustra la aplicación de los resultados en un modelo simplificado de la máquina síncrona.

VII. AGRADECIMIENTOS

El primer autor del artículo agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado. Se agradece a PROMEP que a través del cuerpo académico automatización y control de la UANL hace posible este trabajo.

REFERENCIAS

- Elizondo-González C. (1999). *Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal*. Programa Doctoral de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Disponible en: <http://cdigital.dgb.uanl.mx/te/1080124474.pdf>
- Elizondo-González C. (2000). *Necessary and Sufficient Conditions for Robust Positivity of Polynomial Functions Via Sign Decomposition*. Robust Control Design IFAC ROCOND 2000, Prage Czech Republic.
- Elizondo-González C. (2001). *A New Stability Criterion on Space Coefficients*. Conferences on Decision and Control IEEE. Orlando, Florida, USA.
- Elizondo-González C. (2011). *Parametric Robust Stability*. Recent Advances in Robust Control - Theory and Applications in Robotics and Electromechanics. Andreas Mueller (Ed.). ISBN: 978-953-307-421-4. InTech. Available from: <http://www.intechopen.com/articles/show/title/parametric-robust-stability>
- Keel L. H., Bhattacharyya S. P. (2008). *Fixed Order Multivariable Controller Synthesis: A New Algorithm*. 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancún, México.
- Keel L. H., Bhattacharyya S. P. (2009). *Fixed Order Multivariable Discrete-Time Control*. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, P. R., China.
- Keel L. H., Bhattacharyya S. P. (2011). *Robust Stability via Sign-Definite Decomposition*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 56, No. 1.
- Knap M. J., Keel L. H., Bhattacharyya S. P. (2010). *Robust Stability of Complex Systems with Applications to Performance Attainment Problems*. American Control Conference. Baltimore, MD, USA.
- Kundur P. (1994). *Power System Stability and Control*. Mc-Graw-Hill. New York.
- Robles-Palomares C. Elizondo-González C., Alcorta-García E., Romero-Galván G. (2010). *Análisis de Cotas en la Frecuencia de Raíces de Polinomios Característicos con Incertidumbre Paramétrica*. Asociación de México de Control Automático. Puerto Vallarta, México.